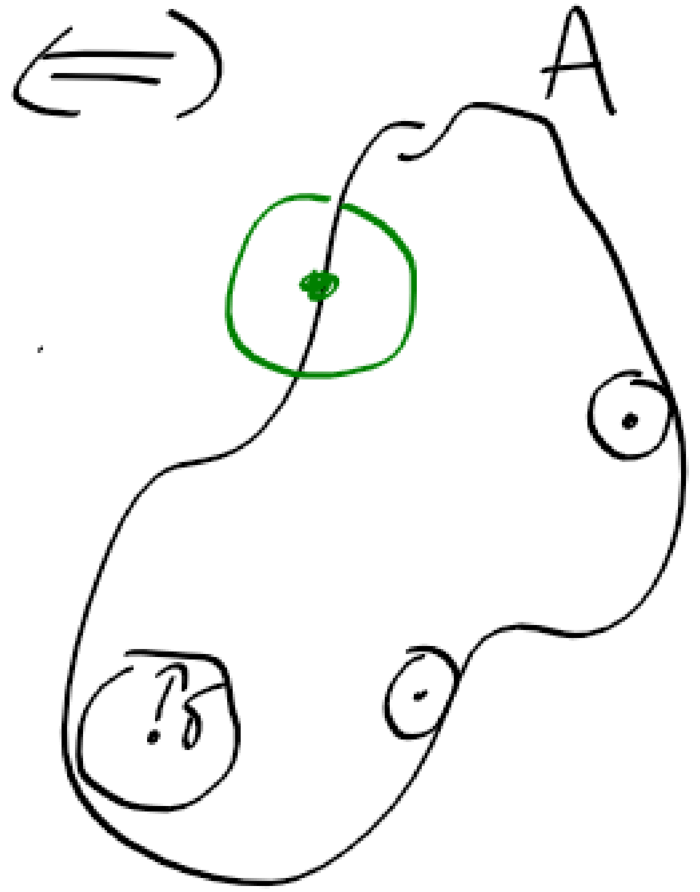
MP … (X, ρ) ρ … metrika, $\rho : X \times X \to [0,\infty)$

$(\rho(x,y) = 0 \iff x = y,\ \rho(x,y) = \rho(y,x),\ \triangle$-ner.)

Otevřená množina: $A \subseteq X$ je ot. $\iff$

$\forall x \in A$: x je vnitřní bod A $\iff$

$\forall x \in A\ \exists \delta > 0 : B(x,\delta) \subseteq A$.



Hranice A je

$H(A) = \{x \in X : x$ je hr. b. $A\}$

x je hr. b. A $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon)$ protíná A i $X \setminus A$.

Uzávěr množiny A:

$$\overline{A} := A \cup H(A)$$

A je uzavřená, pokud $H(A) \subseteq A$.

Příklady: • otevřená koule $B(a,\delta) = \{x \in X : \rho(a,x) < \delta\}$ je otevřená množina.

• Speciálně pro $(X,\rho) = (\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$: otevřené koule $B(a,\delta)$ jsou intervaly $(a-\delta, a+\delta)$.

Podle Lemmatu ot. interval je ot. množina.

Podrobněji: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, (a,b) je ot. množina:

$$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \left|\frac{a-b}{2}\right|\right),$$ což je otevřená.

Jednodušší: z definice:

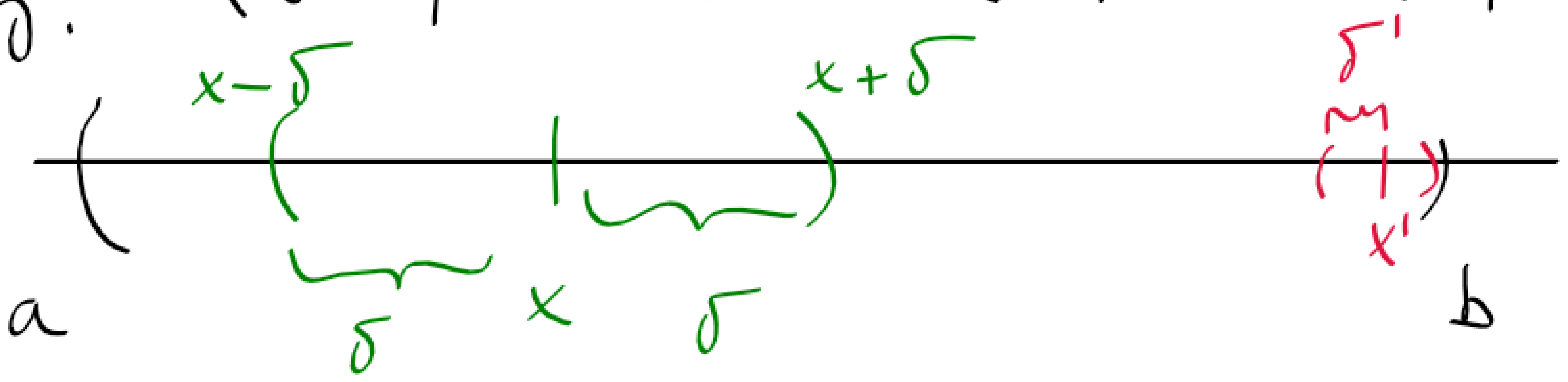
$a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $x \in (a,b)$.

Chceme: x je vnitřní bod (a,b).

Protože $a < x < b$, tak $\exists \delta > 0$

$$a < x-\delta < x < x+\delta < b,$$

tj. $(x-\delta, x+\delta) = B(x,\delta) \subseteq (a,b)$



Tj. $\forall x \in (a,b)$: x je vnitřní bod (a,b), a tedy (a,b) je otevřená mn. podle def.

Uzavřený interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$: je uz.:

Fakt: (X, ρ), $A \subseteq X$. NVJE

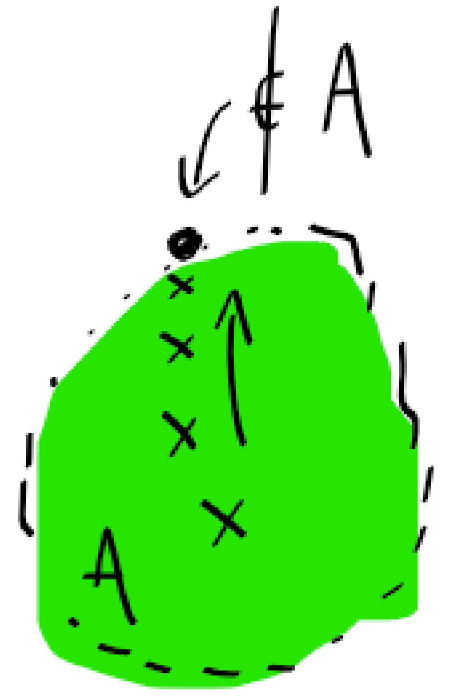
(i) A je uzavřená (podle def. tzn. $H(A) \subseteq A$)

(ii) $A^c = X \setminus A$ je otevřená

(iii) $\forall (x_n) \subseteq A$ posloupnost:

$$x_n \to x \implies x \in A$$

(„z množiny A se nedá vykonvergovat")



$$[a,b] = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{ot.}} \cup \underbrace{(b, \infty)}_{\text{ot.}}\right)}_{\text{sjednocení je ot.}}$$

množiny

$[a,b]$ je komplement ot., a tedy uzavřená.

Uzavřenost $[a,b]$ dokázaná z definice:

Chceme $H([a,b]) \subseteq [a,b]$.

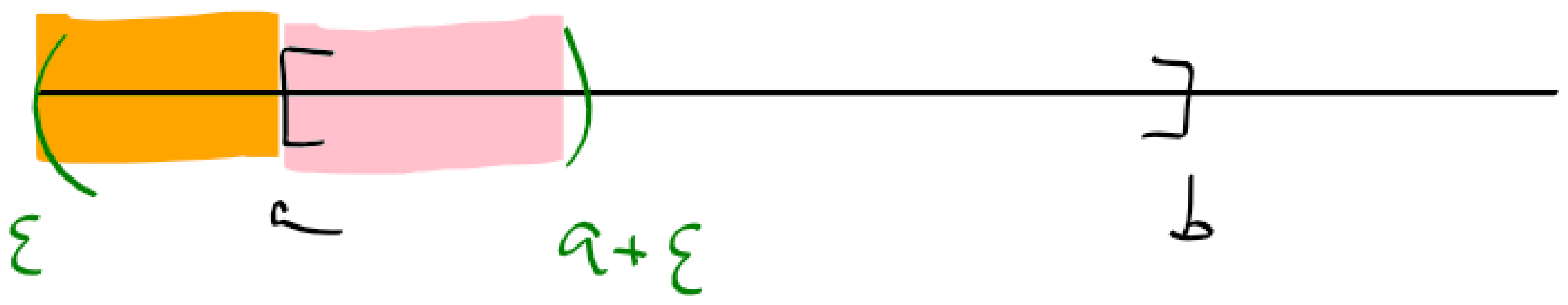
$$H([a,b]) \overset{(*)}{=} \{a, b\} \subseteq [a,b],$$

a $[a,b]$ je uzavřená množina v $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$.

$(*)$: „$\supseteq$" $(a, b \in H([a,b]))$:

$\varepsilon > 0$ libovolné: $B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

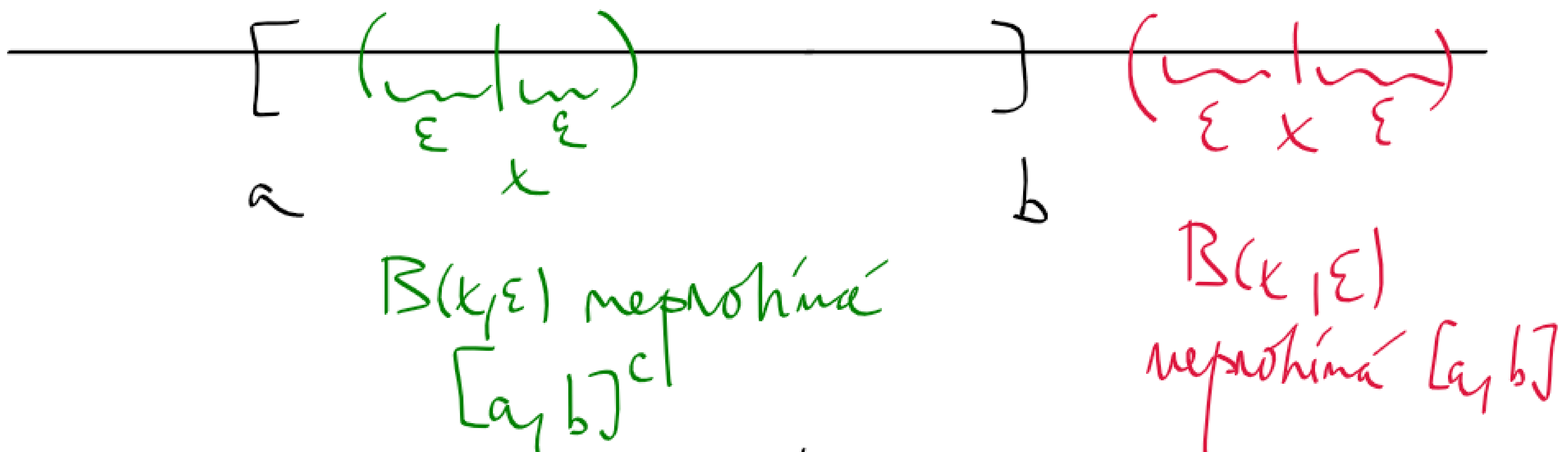
protíná jak $[a,b]$, tak i $[a,b]^c$



Tedy $a \in H([a,b])$, podobně i b.

„$\subseteq$" „nic dalšího v hranici $H([a,b])$ není"!

Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{a,b\}$. Chceme: $x \notin H(\cdots)$.



V obou případech $x \notin H([a,b])$.

Příklad: $\{a\} \subseteq \mathbb{R}$.

- Uzavřená: $H(\{a\}) = \{a\}$. Uz.
- Otevřená: je a vnitřní bod $\{a\}$. NE $\Rightarrow$ není ot.

VSUVKA: $\mathbb{R}$, $\emptyset$ jsou otevřené.

$\mathbb{R}^c = \emptyset$ je ot., a tedy (Fakt)

$\mathbb{R}$ je uz.

$\emptyset^c = \mathbb{R}$ je ot., a tedy $\emptyset$ je uz.

Fakt: V $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ jsou jen dvě obojetné (uz. & ot.) množiny, a to $\mathbb{R}, \emptyset$.

Totéž (analog) v $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_e)$: obojetné jsou právě $\mathbb{R}^d$ a $\emptyset$.

Příklad: $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ není ani otevřená, ani uz. množina.

Důkaz: $H([a,b)) = \{a, b\}$.

$\underbrace{a \in [a,b)}_{\Rightarrow \text{není ot.}}$, $\underbrace{b \notin [a,b)}_{\Rightarrow \text{není uz.}}$

Hraniční bod podle definice není bodem vnitřku!

Příklad: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (v prostoru $\mathbb{R}$)

Říkáme, že $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Stačí dokázat: $H(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Dokažme, že libovolný bod $x \in \mathbb{R}$ je prvkem $H(\mathbb{Q})$. Nechť $x \in \mathbb{R}$ lib.

Chceme: $\boxed{x \in H(\mathbb{Q})}$, tj. podle def.

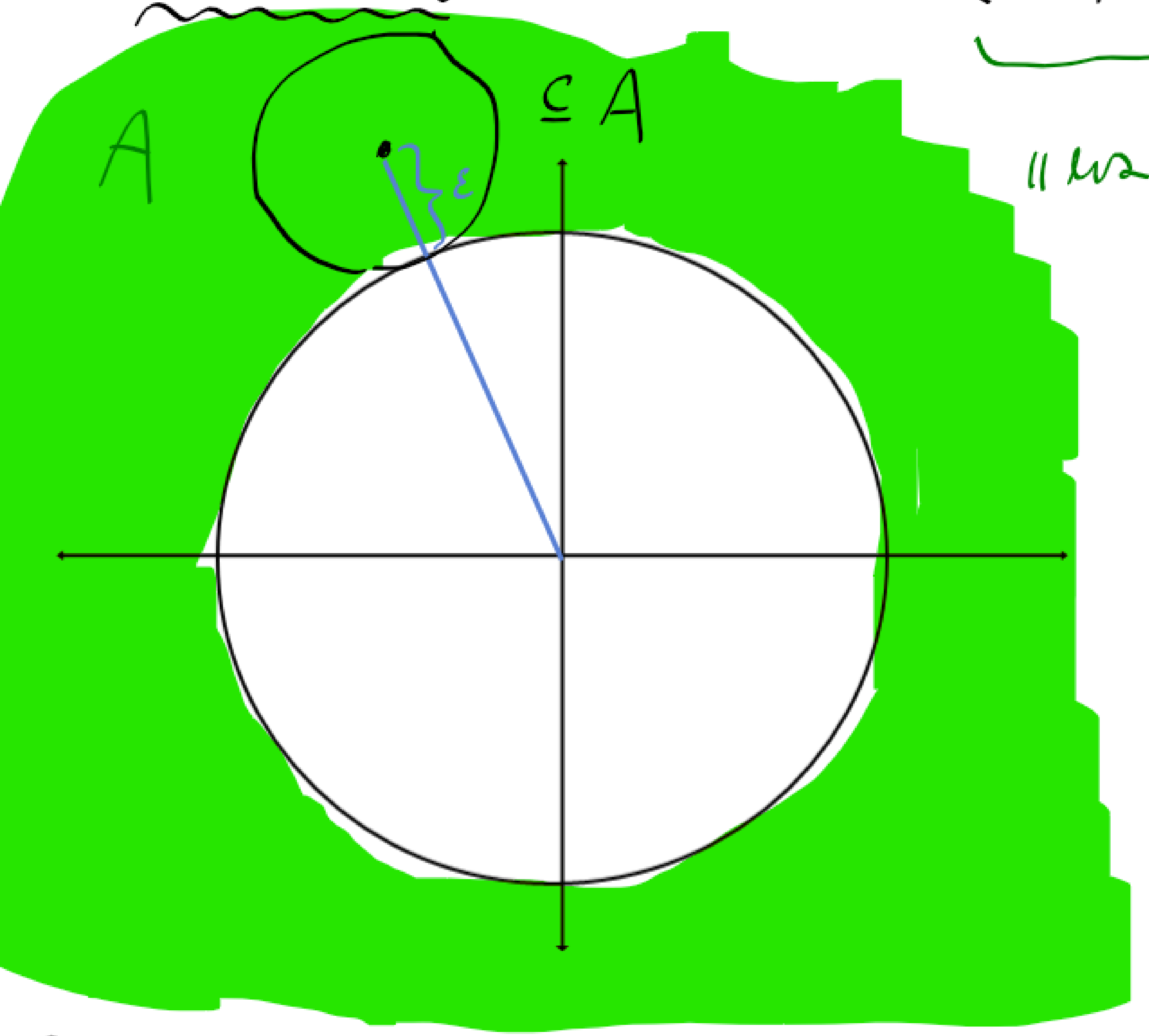
Chceme: $\forall \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon)$ protíná $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}^c$.

To ale víme: $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ obsahuje nějaká racionální i nějaká iracionální č.

Příklad: Rozhodněte o otevřenosti, resp. uz.

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\} = A$

Představa: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}}_{\text{„uz. kruh" ... je uz.!}}$



A je otevřená snadno podle def.

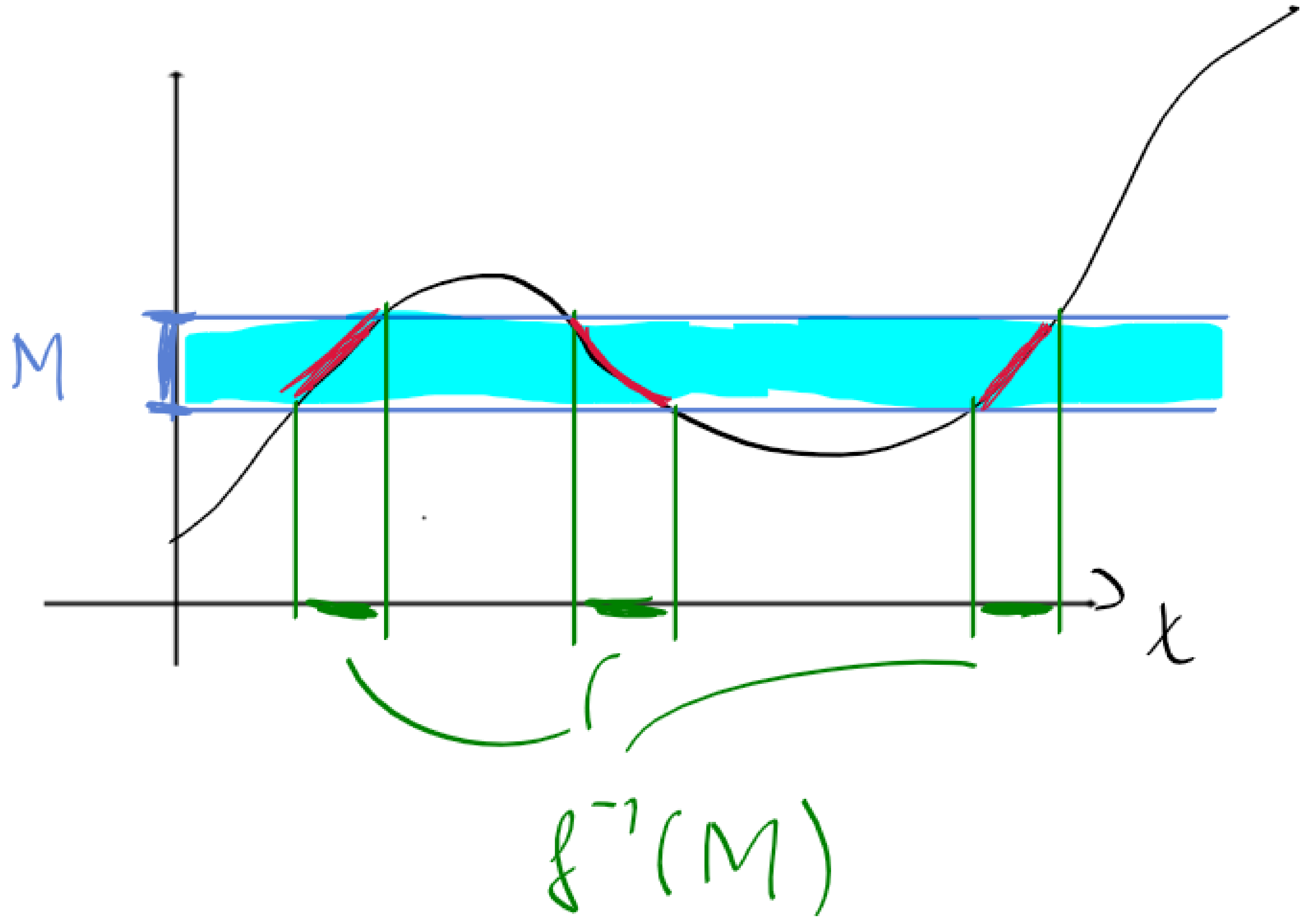
Věta: Buď (X,ρ) MP, $f: X\to\mathbb{R}$. Pak NVJE:

(i) f je spojitá na X;

(ii) $\forall\, G\subseteq\mathbb{R}$ otevřená: $\boxed{f^{-1}(G)}$ je ot. v X;

(iii) $\forall\, F\subseteq\mathbb{R}$ uz.: $\boxed{f^{-1}(F)}$ je uz. v X.

$$f^{-1}(M) = \{x\in X : f(x)\in M\}$$



$$\underbrace{\underbrace{\sin^{-1}}_{\text{spoj.}}\Big(\underbrace{[0,1]}_{\text{uz.}}\Big)}_{\text{uz. podle Věty}} = \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[0+2k\pi,\ \pi+2k\pi]}_{\text{je tedy uzavřená.}}$$

Zpět k $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\} =$

Položme $f(x,y) = x^2+y^2$ ... spojitá na $\mathbb{R}^2$.

Tvrdím, že $A = \underbrace{\underbrace{f^{-1}}_{\text{spoj.}}(\underbrace{(1,\infty)}_{\text{ot.}})}_{\text{ot. podle Věty.}}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 1\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in (1,\infty)\} \overset{\text{def. vzoru}}{=}$

$= f^{-1}((1,\infty))$. Tedy A je otevřená.

Př.: • $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < \sin(x+y^3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \sin(x+y^3) < 0\}$

$= \underbrace{f^{-1}}_{\text{spoj.}}(\underbrace{(-\infty,0)}_{\text{ot.}})$ ... je ot. podle V.

$f(x,y) = L.S. = x^2 - \sin(x+y^3)$

• $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = x\cdot\cos y \ \wedge$

$\wedge \ xyz \le x^2+y^2\} =: B$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = x\cdot\cos y\} \cap$

$\cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \le x^2+y^2\} =$

$= \{\overbrace{x+y+z - x\cdot\cos y}^{f(x,y,z)} = 0\} \cap \{\overbrace{xyz - (x^2+y^2)}^{g(x,y,z)} \le 0\}$

$$= \{\overbrace{x+y+z - x\cdot\cos y}^{f(x,y,z)} = 0\} \cap \{\overbrace{xyz - (x^2+y^2)}^{g(x,y,z)} \le 0\}$$

$$\underbrace{\underbrace{f^{-1}}_{\text{spoj.}}(\underbrace{\{0\}}_{\text{uz.}})}_{\text{Věta} \Rightarrow \text{ je uz.}} \qquad \underbrace{\underbrace{g^{-1}}_{\text{spoj.}}(\underbrace{(-\infty,0]}_{\text{uz.}})}_{\text{Věta} \Rightarrow \text{ je uz.}}$$

<u>Fakt</u>: Libovolný průnik uz. množin je uz. množina.

Nechť C, D jsou uz. v prostoru X.

$$X\setminus(C\cap D) = \underbrace{\underbrace{(X\setminus \overset{\text{uz.}}{C})}_{\text{ot.}} \cup \underbrace{(X\setminus \overset{\text{uz.}}{D})}_{\text{ot.}}}_{\text{ot.}}$$

Tedy $C\cap D$ je uz.

Ukázali jsme, že B je uzavřená.

Je otevřená? ($\Longleftrightarrow$ případě $B=\emptyset \vee B=\mathbb{R}^3$)

$(0,0,0)\in B$.

$x=0 \qquad y+z\neq 0$

$(0,1,0)\notin B$, neboť

$0+1+0 - 0\cdot\cos 1 \neq 0$.

uz. = closed
ot. = open
obojetná = clopen

Tedy $B\neq\emptyset \wedge B\neq\mathbb{R}^3$, a proto (vzhledem k uz. B) není otevřená.

obojetné

($\emptyset$, $\mathbb{R}^3$ jsou jediné současně ot. $\wedge$ uz. v $\mathbb{R}^3$)